## LA SCIENZA NEL PERIODO ELLENISTICO (I parte)

### La matematica

### La trasformazione del mondo antico

Alla fine della democrazia in Grecia con la morte di Pericle (429) ed il quasi simultaneo inizio delle guerre del Peloponneso (431) tra Atene e Sparta, seguiranno 70 anni di lotte tra varie città (Sparta, Atene , Tebe) per l'egemonia sul territorio greco che si concluderanno nel 362 con la sconfitta di Tebe. Dopo Filippo II di Macedonia (ucciso in un complotto) il regno passò al figlio Alessandro che intervenne con durezza contro Tebe radendola al suolo. Solo un anno dopo Alessandro iniziò la campagna contro la Persia, in breve tempo occupò la Fenicia distruggendo Tiro. Nel 332 completò l'occupazione dell'Egitto e fondò Alessandria sulla foce del Nilo. Egli spinse le sue conquiste fino al fiume Indo dove, per stanchezza dei soldati, dovette fermarsi.

Tornato a Babilonia morì nel 323 a soli 33 anni. Solo nel 301 si ebbe una sistemazione definitiva dell'impero da lui lasciato: Tolomeo divenne re d'Egitto e Libia, SeleucoI di Siria e Babilonia, Cassandro re di Macedonia e Grecia, Lisimaco di Tracia ed Asia Minore. Da quel momento in poi la situazione ebbe continui cambiamenti per continue guerre con una relativa calma in Egitto in cui si mantenne per circa 300 anni la dinastia dei Tolomei (fino a Cleopatra).

Per quanto riguarda la Magna Grecia, l'Italia meridionale fu interamente conquistata da Roma con la definitiva ritirata di Pirro in Grecia. La Sicilia cadde definitivamente sotto il dominio di Roma nel 212.

Nonostante l'insieme di queste vicende l'attività scientifica mantiene i suoi caratteri peculiari e si svolge principalmente ad Alessandria d'Egitto solo marginalmente toccata dalle violente perturbazioni accennate.

### La Biblioteca di Alessandria

Ad Alessandria, per iniziativa di Tolomeo I Soter (il salvatore) nel 290 si iniziò a costruire la famosa Biblioteca all'interno di uno spazio chiamato *Mousaion*, centro di cultura greca per le indagini mediche, astronomiche e biologiche (disponeva infatti di sale anatomiche, di un osservatorio, uno zoo, un orto botanico). Esso disponeva di alloggi per gli studiosi, sale di lettura, di una mensa comune ed era finanziato dallo Stato che provvedeva anche ad un salario, senza obbligo di fare lezione, per gli oltre cento ricercatori che vi risiedevano.

L'ambizione di Tolomeo era che questa biblioteca diventasse un centro di raccolta per tutto lo scibile umano. Vari studiosi del Liceo vennero chiamati con la supervisione di Demetrio Falero che proveniva dal Liceo di Aristotele e conosceva i metodi di raccolta e catalogazione dei libri, rotoli e papiri, ecc. La biblioteca arrivò ad avere approssimativamente 700.000 rotoli, tra opere originali e copie, provenienti da tutto il mondo, tutte tradotte in greco e divenne un centro di cultura che attrasse le migliori menti e persone colte dell'epoca.

L'esempio della biblioteca si estese a nuovi centri che cercarono di attirare alle loro corti gli studiosi noti. L'effetto fu una diffusione enorme della cultura. Questa diffusione unita al miglioramento delle condizioni di lavoro ed il perfezionamento degli strumenti, produsse l'effetto dell**'accantonamento delle filosofie platoniche ed aristoteliche**.

La dottrina delle cause finali (teleologia) fu soppiantata insieme alla teoria aristotelica del moto e la sua negazione del vuoto

### La matematica ellenistica

### EUCLIDE

La prima eminente personalità che si presenta alla nostra attenzione è quella di **Euclide** della cui biografia sappiamo molto poco, riportiamo l'unica fonte di cui disponiamo, un commento di Proco (V sec d.C.):

*Euclide , l'autore degli Elementi, ha messo in ordine i vari lavori di Eudosso, migliorati da Teeteto, e ha dato inoltre dimostrazioni indiscutibili su quanto i predecessori non avevano provato con sufficiente rigore. Euclide è posteriore ai discepoli di Platone, ma anteriore ad* ***Eratostene*** *ed* ***Archimede*** *i quali erano contemporanei. Euclide era di opinioni platonico tanto che pose per scopo finale dei suoi Elementi la costruzione delle figure platoniche (i poliedri regolari).*

*Si hanno di lui molte altre opere matematiche scritte con singolare precisione ma si ammirano specialmente i suoi Elementi di geometria per l'ordine che vi regna, per la scelta dei teoremi e problemi assunti come fondamentali ed anche per la varietà dei ragionamenti condotti in tutti i modi possibili, sempre inconfutabili, esatti e dotati del carattere più scientifico.*

In definitiva possiamo dire che Euclide visse all'incirca tra il 330 ed il 260 e che gli *Elementi* furono scritti intorno al 300 a.C. Sembra anche chiaro che Euclide abbia realizzato una stupenda sintesi della geometria costruita nei secoli precedenti ma non pervenutaci se non per testimonianze indirette. Ma la costruzione di un libro di *Elementi* non è invenzione di Euclide. Se si tiene conto di quanto afferma Aristotele, cioè che in matematica con la parola *elementi* si intende l'insieme delle proposizioni iniziali dalle quali possono discenderne delle altre, l'intento di realizzare degli Elementi base della geometria deve essere stato di molti matematici. Ma anche se latri tentarono questa strada fu Euclide che riuscì a darne una versione soddisfacente per l'organizzazione, le dimostrazioni e le costruzioni geometriche in casi d crescente difficoltà.

Fu proprio questa struttura completa e compatta dell'opera di Euclide che le garantì un'enorme diffusione che la fece sopravvivere alle altre. Si richiedevano dimostrazioni stringenti per ogni affermazione che si faceva,le dimostrazioni dovevano essere generali e ciascuna avere delle giustificazioni precise, Tali dimostrazioni nel V e IV secolo coprirono gran parte dei teoremi noti e scoperti e da quell'epoca si cominciò a sistematizzare ed organizzare con ordine logico tutto ciò che si andava accumulando.

Ma chi ha fatto questo o quel teorema?
Abbiamo idee vaghe. Non sappiamo ad esempio chi ha dato la prima dimostrazione del teorema di Pitagora e non sappiamo quale è stata la prima dimostrazione. Sappiamo invece da Archimede che alcuni teoremi, che mettono in relazione volumi di cono e cilindro o di piramide e prisma, sono di Democrito e che le prime dimostrazioni di essi sono di Eudosso. Sappiamo che Eudosso usò il **metodo di esaustione**, fondato sulle proposizioni X, 1 degli *Elementi*, che sarà di Archimede, ma non sappiamo se fu lui ad inventarlo. Sappiamo che una delle parti più eleganti e profonde degli Elementi, quella che si occupa di proporzioni e che compare nel libro V degli *Elementi* di Eudosso, ma sappiamo anche che di proposizioni si discuteva da tempi remoti, anche se sembra indiscutibilmente di Eudosso l'applicabilità della teoria delle proporzioni di Eudosso sia a grandezze commensurabili che incommensurabili. E fin qui per ciò che sappiamo. Altri autori eventuali sono completamente scomparsi alla nostra conoscenza.

Resta da discutere quest'opera superba che porta dentro di sé l'enorme sapienza non del solo Euclide ma di tutti i geometri greci. E' un'opera che ha avuto una diffusione paragonabile alla sola Bibbia e che, praticamente come è nata, è ancora studiata in tutte le scuole del mondo. Va sottolineato ciò che ho in vari modi anticipato. Per la prima volta siamo di fronte ad un'opera **che rende la matematica una teoria scientifica** che prende le mosse da alcune definizioni di base di alcuni enti geometrici che non necessitano di alcuna dimostrazione (**postulati**). Se si vogliono aggiungere altre affermazioni alle fondamentali occorrerà farlo con stringenti dimostrazioni, attraverso cioè una **catena di implicazioni logiche** che, a partire dai postulati, ci porti a ciò che si deve dimostrare. Gli enti fondamentali su cui Euclide lavora sono quelli che comunemente si disegnano con riga e compasso, cioè rette e circonferenze; tali enti entrano così in una teoria scientifica.

Vi è un argomento che possiamo brevemente discutere, quello relativo al **V postulato, quello sulle rette parallele.**

*V. Risulti postulato che, se una retta venendo a cadere su due rette, forma gli angoli interni e dalla stessa* *parte minori di due retti*, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

Questo postulato (si mostra facilmente utilizzando la proprietà transitiva del parallelismo mostrata da Euclide nella Proposizione 30 del Libro I) è equivalente a quello che noi usualmente conosciamo:

***V. Per un punto fuori di una retta passa una sola parallela alla retta stessa.***

Qui vi è un richiamo tacito ad Aristotele quando affermava che vi sono certi matematici che c*redono che possano tracciare parallele senza rendersi conto che in tal modo danno per scontate affermazioni che non si possono dimostrare se le parallele non esistono*. Il problema quindi della dimostrabilità di affermazioni sulle parallele era già presente addirittura in Aristotele. E vari matematici (ad esempio Tolomeo e Proclo) tentarono di dimostrare questo quinto postulato di Euclide fino a quando (2100 anni dopo) **fu dimostrata da Gauss (ma anche da Bólyai e Lobacevskij) l'impossibilità di dimostrarlo.**

Contrariamente a ciò che comunemente si crede, gli *Elementi* non sono esclusivamente un'opera geometrica e lo abbiamo già visto nel descriverli. E' interessante vedere ad esempio la dimostrazione che Euclide presenta **dell'infinità dei numeri primi** (attenzione ciò è utile per sbarazzarci di quanti ritengono che non era chiaro il concetto d'*infinito* nell'antichità e per capire cosa s'intende per *infinito potenziale*).

Questo libro, veramente splendido, ebbe con il tempo un impatto duplice. Da una parte fu il libro di testo di tutti i giovani che iniziavano ad interessarsi alla matematica, dall'altra fu un **modello del metodo che conosciamo come *assiomatico-deduttivo.*** Ma, per ciò che abbiamo detto a proposito del V postulato, anche *ipotetico* in quanto Euclide era al corrente che alcune delle affermazioni di base della sua geometria erano già state messe in discussione o rifiutate da importanti filosofi greci. E' un poco il coronamento di quanto i filosofi, come Platone ed Aristotele in modi diversi, avevano richiesto nei secoli precedenti. La prova, la dimostrazione, come Aristotele che diceva con qualche ragione, che non tutte le affermazioni possono essere provate perché il punto di partenza di ogni dimostrazione sono sempre alcune affermazioni indimostrabili (esse erano, per Aristotele, le definizioni, gli assiomi e le ipotesi). E gli Elementi partono dagli stessi presupposti richiesti da Aristotele (con gli *assiomi* aristotelici che diventano qui *nozioni comuni* e con le *ipotesi* che sono all'interno delle *proposizioni*).

## ARCHIMEDE

Un altro grande matematico e non solo del secolo III è certamente **Archimede**, uno dei creatori del calcolo che oggi conosciamo come infinitesimale.

**Archimede di Siracusa** (circa 287 a.C. – 212 a. C.) è figlio dell'astronomo Fidia che da giovane lo manda a studiare ad Alessandria, fu allievo di Euclide. Tornato a Siracusa ebbe un incarico di ingegnere civile che gli lasciava tempo libero necessario per i suoi studi. Fu l'artefice della costruzione di macchine da guerra (catapulte, balestre, ganci fissati a travi sporgenti e manovrati da carrucole, argani vericelli per arpionare le navi che si fossero avvicinate ed invenzione delle feritoie da cui si lanciava con gran frastuono ogni cosa)(9) contro gli assedianti Romani, guidati da Claudio Marcello. La città fu comunque espugnata e nelle vicende del saccheggio, nonostante ordine contrario di Marcello, Archimede fu ucciso da un soldato (in circostanze diverse, in gran parte fantastiche, a seconda dell'autore). Fu sepolto in una tomba fattagli preparare da Marcello in cui, secondo le sue volontà, vi era scolpita solo una sfera inscritta in un cilindro. La tomba fu ritrovata da Cicerone(10) nel 75 a.C. ma oggi, nonostante vicino Siracusa vi sia la località Tomba di Archimede, non si sa che fine abbia fatto.

Varie opere di Archimede sono andate perdute. Oggi disponiamo dei seguenti suoi scritti: *Della sfera e del cilindro* (in due libri), *Delle conoidi e delle sferoidi*, *Delle spirali*, *Dell'equilibrio dei piani e loro centro di* *gravità* (in due libri), *Arenario*, *Quadratura della parabola; Metodo sui teoremi meccanici* (scoperto solo nel 1906 dal danese Heiberg in un palinsesto ad Istanbul), *Galleggianti* (in due libri), *Misura del cerchio* [l'ordine cronologico in cui sono state scritte da Archimede è molto dubbio]. A questo grande scienziato si deve **l'introduzione sistematica di procedimenti infinitesimali**, sulla strada aperta da Democrito e con un rigore ed una eleganza che destano ammirazione.

**Il metodo di esaustione**

Tale metodo, già utilizzato da Euclide nel libro X degli *Elementi*, permetteva di trovare **aree o volumi di regioni curve mediante approssimazioni successive**, **con l'uso di poligoni inscritti e circoscritti (o poliedri) dei quali le aree (o volumi) erano note.** Per trovare ad esempio l'area di un cerchio mediante approssimazione successiva, si inscrivevano e circoscrivevano ad esso dei poligoni regolari, dei quali si aumentava sempre più il numero dei lati (nel caso della sfera si usavano poliedri, aumentando sempre più il numero delle facce). La linea di pensiero è sempre stata la medesima: poiché non si riesce a calcolare in modo elementare un'area racchiusa da una superficie curva, si tende ad approssimare tale area con un certo numero di aree che sappiamo calcolare. Il problema è il livello dell'approssimazione. E' evidente che un triangolo inscritto in un cerchio approssima malissimo l'area del cerchio. Meglio un quadrato, un pentagono, un esagono, meglio ancora tanti rettangolini .

Successivamente si passò a superfici curve non approssimabili con poligoni regolari. Il problema divenne la suddivisione di tali superfici mediante i suddetti rettangolini che la approssimassero sempre meglio. Da questo punto si capì che la migliore approssimazione si sarebbe avuta con rettangolini sempre più piccoli, nei quali una dimensione diventasse praticamente nulla ... Ci volle molto a conquistare queste aree, queste quadrature, e la storia del calcolo racconta come si è riusciti a farlo

Il metodo di esaustione, già trattato da Euclide fu uno degli argomenti che più interessarono il matematico Archimede nella ricerca di alcune aree (segmento parabolico, ellisse, ...), di alcuni volumi e nello studio del problema della tangente ad una spirale (quest'ultimo è uno dei primi problemi di calcolo differenziale mentre gli altri, e la gran maggioranza di quelli che incontreremo, relativi ad aree e cioè a quadrature, sono problemi di calcolo integrale).

**Esempi dell'applicazione del metodo di esaustione**

***PROPOSIZIONE 1.***

*Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale ad un cateto [del triangolo] e la circonferenza uguale alla base cioè all'altro cateto*

***PROPOSIZIONE 2.***

*Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che 11 ha rispetto a 14.*

***PROPOSIZIONE 3.***

*La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera ancora di meno di un settimo del diametro, e di più di dieci settantunesimi.*

**L’Arenario**

L'*Arenario* (che vuol dire contatore di granelli) è un'opera di Archimede con delle caratteristiche particolari. Da una parte si occupa di Astronomia ed è l'unica testimonianza attendibile del sistema astronomico di **Aristarco di Samo**. Dall'altra essa è incentrata sui *numeri*, sull'aritmetica, così poco sviluppata in Grecia. Archimede coglie la grave difficoltà che il simbolismo in uso per i numeri impediva, ad esempio e soprattutto, **di indicare e chiamare per nome numeri molto grandi**. Ricordo in breve il sistema di numerazione greco del periodo alessandrino (numerazione ionica). I numeri erano rappresentati con le lettere dell'alfabeto come mostrato nella figura seguente. E con tale sistema si poteva scrivere fino a 100 milioni (una miriade di miriadi cioè 10 000 . 10 000 = 100 000 000 che con nostro simbolismo è $10^8$). Sembra chiaro che all'invenzione dell'alfabeto e della relativa scrittura, che enormi passi in avanti fece fare al pensiero in genere, non corrispose che poca cosa in ambito di simbolismo numerico. La geometria, come abbiamo visto e continueremo a vedere, marciava bene: con le lettere che indicano segmenti e punti si può fare quasi tutto. Ma disporre delle sole lettere per indicare i numeri rende molto complesso lavorare con i numeri medesimi per tirarne fuori, ad esempio, un'algebra. Egli dice di aver trovato il modo di indicare e chiamare qualunque numero: In pratica quel miriade di miriadi (che per comodità indico con $10^8$) è considerata come l'unità del suo sistema di numerazione. Egli chiama *numeri primi* (con significato diverso da quello che noi diamo) quelli che vanno da 1 a $10^8$, *numeri secondi* quelli che vanno da $10^8$ a $10^8.10^8 = 10^{16}$, *numeri terzi* quelli che vanno da $10^{16}$ a $10^8.10^8.10^8 = 10^{24}$, e si prosegue così con *numeri quarti*, *numeri quinti*, .... fino a che l'ordine non diventa la miriade di miriadi.